

Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek I. című tárgyhoz

Burai Pál

Vektorok, mátrixok, lineáris egyenletrendszerek

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

A rendezett valós számpárokat kétdimenziós valós vektoroknak nevezzük.
Jelölésükre latin kisbetűket használunk.

A rendezett valós számpárokat kétdimenziós valós vektoroknak nevezzük. Jelölésükre latin kisbetűket használunk. Megkülönböztetjük az oszlopvektorokat és a sorvektorokat. Ha mást nem mondunk, akkor a vektorok mindig oszlopvektorok, és a transzponáltjuk sorvektor.

Vektorok

A rendezett valós számpárokat kétdimenziós valós vektoroknak nevezzük. Jelölésükre latin kisbetűket használunk. Megkülönböztetjük az oszlopvektorokat és a sorvektorokat. Ha mást nem mondunk, akkor a vektorok mindig oszlopvektorok, és a transzponáltjuk sorvektor.

Példák

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^T = [1, 2], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$$

A rendezett valós számpárokat kétdimenziós valós vektoroknak nevezzük. Jelölésükre latin kisbetűket használunk. Megkülönböztetjük az oszlopvektorokat és a sorvektorokat. Ha mást nem mondunk, akkor a vektorok mindig oszlopvektorok, és a transzponáltjuk sorvektor.

Példák

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^T = [1, 2], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$$

Hasonlóan definiálhatunk többdimenziós valós- vagy komplex vektorokat. A megfelelő dimenziós vektorok halmazára az $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ jelöléseket használjuk.

Példák

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_n], \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 + 4i \\ -1 - i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Vektorok összeadása

Azonos dimenziójú oszlopvektorokat (sorvektorokat) koordinátáinként adjuk össze.

Vektorok összeadása

Azonos dimenziójú oszlopvektorokat (sorvektorokat) koordinátáinként adjuk össze.

Példák

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [1+i, -1+2i] + [i, 3+3i] = [1+2i, 2+5i],$$

Vektorok összeadása

Azonos dimenziójú oszlopvektorokat (sorvektorokat) koordinátáinként adjuk össze.

Példák

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [1+i, -1+2i] + [i, 3+3i] = [1+2i, 2+5i],$$

$$\begin{bmatrix} \pi + \sqrt{2}i \\ \sqrt{3} - i \\ 1 - i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\pi - \pi i \\ \sqrt[3]{5} + 4i \\ \sin(1) + \cos(1)i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{2} + \pi)i \\ \sqrt{3} + \sqrt[3]{5} + 3i \\ 1 + \sin(1) + (\cos(1) - 1)i \end{bmatrix}.$$

Vektorok összeadása

Azonos dimenziójú oszlopvektorokat (sorvektorokat) koordinátáinként adjuk össze.

Példák

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [1+i, -1+2i] + [i, 3+3i] = [1+2i, 2+5i],$$

$$\begin{bmatrix} \pi + \sqrt{2}i \\ \sqrt{3} - i \\ 1 - i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\pi - \pi i \\ \sqrt[3]{5} + 4i \\ \sin(1) + \cos(1)i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{2} + \pi)i \\ \sqrt{3} + \sqrt[3]{5} + 3i \\ 1 + \sin(1) + (\cos(1) - 1)i \end{bmatrix}.$$

Általában

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Vektorok skalárral való szorzása

Egy vektort adott skalárral koordinátánként szorzunk.

Vektorok skalárral való szorzása

Egy vektort adott skalárral koordinátánként szorzunk.

Példák

$$3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad -2 [10, 0, 2, 3] = [-20, 0, -4, -6].$$

Vektorok skalárral való szorzása

Egy vektort adott skalárral koordinátánként szorzunk.

Példák

$$3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad -2 [10, 0, 2, 3] = [-20, 0, -4, -6].$$

$$i \begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4i \end{bmatrix}, \quad (1 - i) [1, 0, 1 + i] = [1 - i, 0, 2].$$

Vektorok skalárral való szorzása

Egy vektort adott skalárral koordinátánként szorzunk.

Példák

$$3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad -2 [10, 0, 2, 3] = [-20, 0, -4, -6].$$

$$i \begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4i \end{bmatrix}, \quad (1 - i) [1, 0, 1 + i] = [1 - i, 0, 2].$$

Általában, ha

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ egy vektor, és } \lambda \text{ egy skálár, akkor } \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

Vektorok összeadásának tulajdonságai

- A vektorok összeadása **művelet**: Két azonos típusú vektor összeadása egy velük azonos típusú vektort eredményez.

Vektorok összeadásának tulajdonságai

- A vektorok összeadása **művelet**: Két azonos típusú vektor összeadása egy velük azonos típusú vektort eredményez.
- Ez a művelet **asszociatív**: Három vektor esetén az első kettő összegéhez a harmadikat hozzáadva ugyanazt kapom, ha az elsőt a másik kettő összegéhez adom hozzá.

Vektorok összeadásának tulajdonságai

- A vektorok összeadása **művelet**: Két azonos típusú vektor összeadása egy velük azonos típusú vektort eredményez.
- Ez a művelet **asszociatív**: Három vektor esetén az első kettő összegéhez a harmadikat hozzáadva ugyanazt kapom, ha az elsőt a másik kettő összegéhez adom hozzá.
- Létezik **additív egység**: A csupa nulla vektort bármely vektorhoz hozzáadva az eredeti vektort kapom vissza.

Vektorok összeadásának tulajdonságai

- A vektorok összeadása **művelet**: Két azonos típusú vektor összeadása egy velük azonos típusú vektort eredményez.
- Ez a művelet **asszociatív**: Három vektor esetén az első kettő összegéhez a harmadikat hozzáadva ugyanazt kapom, ha az elsőt a másik kettő összegéhez adom hozzá.
- Létezik **additív egység**: A csupa nulla vektort bármely vektorhoz hozzáadva az eredeti vektort kapom vissza.
- Létezik **additív inverz**: Minden vektorhoz létezik olyan vektor, amellyel összeadva az additív egységet kapom.

Vektorok összeadásának tulajdonságai

- A vektorok összeadása **művelet**: Két azonos típusú vektor összeadása egy velük azonos típusú vektort eredményez.
- Ez a művelet **asszociatív**: Három vektor esetén az első kettő összegéhez a harmadikat hozzáadva ugyanazt kapom, ha az első a másik kettő összegéhez adom hozzá.
- Létezik **additív egység**: A csupa nulla vektort bármely vektorhoz hozzáadva az eredeti vektort kapom vissza.
- Létezik **additív inverz**: Minden vektorhoz létezik olyan vektor, amellyel összeadva az additív egységet kapom.
- A vektorok összeadása **kommutatív** művelet: Két vektort tetszőleges sorrendben adhatok össze.

Vektorok skalárral való szorzásának tulajdonságai

- Tetszőleges vektort a nulla számmal megszorozva a nulla vektort (additív egységet) kapom eredményül.

Vektorok skalárral való szorzásának tulajdonságai

- Tetszőleges vektort a nulla számmal megszorozva a nulla vektort (additív egységet) kapom eredményül.
- Ha egy vektort megszorozok eggyel, akkor magát a vektort kapom eredményül.

Vektorok skalárral való szorzásának tulajdonságai

- Tetszőleges vektort a nulla számmal megszorozva a nulla vektort (additív egységet) kapom eredményül.
- Ha egy vektort megszorozok eggyel, akkor magát a vektort kapom eredményül.
- Ha egy vektort megszorozok egy skalárral, majd az eredményt újra megszorozom egy másik skalárral, akkor az eredmény ugyanaz lesz, ha a vektort a skalárok szorzatával szorzom meg.

Vektorok skalárral való szorzásának tulajdonságai

- Tetszőleges vektort a nulla számmal megszorozva a nulla vektort (additív egységet) kapom eredményül.
- Ha egy vektort megszorozok eggyel, akkor magát a vektort kapom eredményül.
- Ha egy vektort megszorozok egy skalárral, majd az eredményt újra megszorozom egy másik skalárral, akkor az eredmény ugyanaz lesz, ha a vektort a skalárok szorzatával szorzom meg.
- **Disztributivitás:** Vektorok összegét egy skalárral megszorozva úgy is megkaphatom, ha a vektorokat külön-külön megszorozom a szóban forgó skalárral, majd az így kapott vektorokat adom össze.
Hasonlóan, egy vektort úgy is megszorozhatok skalárok összegével, hogy külön-külön megszorozom a vektort a szóban forgó skalárokkal, majd a kapott vektorokat összeadom.

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Példák vektorterekre

- A valós sík vektorai: $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Példák vektorterekre

- A valós sík vektorai: $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$
- A valós tér vektorai: $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Példák vektorterekre

- A valós sík vektorai: $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$
- A valós tér vektorai: $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$
- A valós n dimenziós tér:
 $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Példák vektorterekre

- A valós sík vektorai: $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.
- A valós tér vektorai: $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A valós n dimenziós tér:
 $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
- A komplex n dimenziós (a komplex számok teste felett) tér:
 $\mathbb{C}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}$.

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Példák vektorterekre

- A valós sík vektorai: $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$
- A valós tér vektorai: $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$
- A valós n dimenziós tér:
 $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$
- A komplex n dimenziós (a komplex számok teste felett) tér:
 $\mathbb{C}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}.$
- A legfeljebb n -ed fokú valós polinomok tere:
 $P_n = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Példák vektorterekre

- A valós sík vektorai: $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$
- A valós tér vektorai: $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$
- A valós n dimenziós tér:
 $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$
- A komplex n dimenziós (a komplex számok teste felett) tér:
 $\mathbb{C}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}.$
- A legfeljebb n -ed fokú valós polinomok tere:
 $P_n = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$
- A valós polinomok tere: $\cup_n P_n.$

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Példák vektorterekre

- A valós sík vektorai: $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.
- A valós tér vektorai: $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A valós n dimenziós tér:
 $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
- A komplex n dimenziós (a komplex számok teste felett) tér:
 $\mathbb{C}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}$.
- A legfeljebb n -ed fokú valós polinomok tere:
 $P_n = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.
- A valós polinomok tere: $\cup_n P_n$.
- Adott intervallumon folytonos függvények tere.

Az előző tulajdonságokkal rendelkező struktúrákat vektortereknek nevezzük.

Példák vektorterekre

- A valós sík vektorai: $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.
- A valós tér vektorai: $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- A valós n dimenziós tér:
 $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
- A komplex n dimenziós (a komplex számok teste felett) tér:
 $\mathbb{C}^n = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}\}$.
- A legfeljebb n -ed fokú valós polinomok tere:
 $P_n = \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$.
- A valós polinomok tere: $\cup_n P_n$.
- Adott intervallumon folytonos függvények tere.
- Adott intervallumon, adott rendben differenciálható függvények tere.

Vektorok hossza és belső szorzata

Ha $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2)$, akkor a Pitagorasz tételből kapjuk, hogy a hossza $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Jele: $\|\mathbf{a}\|$, kiolvasva **a** hossza, vagy **a normája**.

Vektorok hossza és belső szorzata

Ha $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2)$, akkor a Pitagorasz tételből kapjuk, hogy a hossza $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Jele: $\|\mathbf{a}\|$, kiolvasva $\mathbf{a}$ hossza, vagy $\mathbf{a}$ **normája**. Ezt úgy is megkaphatjuk, ha bevezetjük a vektorok **belső szorzatát**:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = [a_1, a_2] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{ha a vektorok valósak,}$$

és

$$\mathbf{a}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} = [a_1, a_2] \cdot \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 \quad \text{ha a vektorok komplexek.}$$

Vektorok hossza és belső szorzata

Ha $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2)$, akkor a Pitagorasz tételből kapjuk, hogy a hossza $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Jele: $\|\mathbf{a}\|$, kiolvassa $\mathbf{a}$ hossza, vagy $\mathbf{a}$ **normája**. Ezt úgy is megkaphatjuk, ha bevezetjük a vektorok **belső szorzatát**:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = [a_1, a_2] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{ha a vektorok valósak,}$$

és

$$\mathbf{a}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} = [a_1, a_2] \cdot \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 \quad \text{ha a vektorok komplexek.}$$

Ekkor

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \quad \text{a valós esetben,}$$

illetve

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \bar{\mathbf{a}}} \quad \text{a komplex esetben.}$$

Általában

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{a valós esetben}$$

illetve

$$\mathbf{x}^T \cdot \bar{\mathbf{y}} = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n \quad \text{a komplex esetben.}$$

Általában

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{a valós esetben}$$

illetve

$$\mathbf{x}^T \cdot \bar{\mathbf{y}} = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n \quad \text{a komplex esetben.}$$

A norma tulajdonságai

- Tetszőleges vektor normája nemnegatív, és csak a nullvektor normája nulla.

Általában

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{a valós esetben}$$

illetve

$$\mathbf{x}^T \cdot \bar{\mathbf{y}} = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n \quad \text{a komplex esetben.}$$

A norma tulajdonságai

- Tetszőleges vektor normája nemnegatív, és csak a nullvektor normája nulla.
- Egy vektor skalárszorosának a hossza egyenlő a vektor hossza szorozva a skalár abszolútértékével.

Általában

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{a valós esetben}$$

illetve

$$\mathbf{x}^T \cdot \bar{\mathbf{y}} = [x_1, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n \quad \text{a komplex esetben.}$$

A norma tulajdonságai

- Tetszőleges vektor normája nemnegatív, és csak a nullvektor normája nulla.
- Egy vektor skalárszorosának a hossza egyenlő a vektor hossza szorozva a skalár abszolútértékével.
- Két vektor összegének a hossza kisebb vagy egyenlő, mint a hosszak összege.

A belső szorzat geometriai jelentése

Két vektor belső szorzata megegyezik a hosszuk szorzata szorozva a bezárt szögük koszinuszával:

$$x^T \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cos \alpha_{x,y}.$$

Az x és y vektor belső szorzata egyenlő az x vektor hosszának szorzata az x vektor y vektorra eső merőleges vetületének hosszával.

Következmény

Két vektor pontosan akkor **merőleges**, ha a belső szorzatuk nulla.

Feladat

Legyen $x^T = (1, 2)$. Keressen egy x -re merőleges y vektort! Jellemezze az összes ilyen y vektort!

Belső szorzat tulajdonságai

Valós eset:

- Szimmetria: $x^T \cdot y = y^T \cdot x$.
- Disztributivitás: $(x + y)^T \cdot z = x^T \cdot z + y^T \cdot z$.
- Homogenitás: $(\lambda x)^T \cdot y = \lambda(x^T \cdot y)$.
- Pozitív definitesség: $x^T \cdot x \geq 0$ minden x vektor esetén, és $x^T \cdot x = 0$ pontosan akkor ha $x = 0$.

Feladat

Vizsgáljuk meg a komplex eset tulajdonságait!

Legyen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i \\ i^2-3i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} i-1 \\ i-2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét!

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad -5\mathbf{c}, \quad 12\mathbf{a} + 4\mathbf{b}, \quad 3\mathbf{c} + \mathbf{d}, \quad \|\mathbf{b}\|, \quad \|\mathbf{c} + \mathbf{d}\|, \quad \mathbf{u} - i\mathbf{v},$$

$$(3 + 2i)\mathbf{w} - i\mathbf{z}, \quad \mathbf{v} - 3i\mathbf{u}, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{z}\|, \quad \|i\mathbf{z} + \mathbf{w}\|.$$

Lineáris kombináció, lineáris függőség, lineáris függetlenség

Legyenek $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ azonos típusú vektorok, α , β skalárok, ekkor az

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$

vektort az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorok α , β együtthatókkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Lineáris kombináció, lineáris függőség, lineáris függetlenség

Legyenek $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ azonos típusú vektorok, α , β skalárok, ekkor az

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$

vektort az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorok α , β együtthatókkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Példák

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad i \begin{bmatrix} 2-i \\ 1+i \end{bmatrix} + (1+i) \begin{bmatrix} 1 \\ 2+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3i \\ -1+5i \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció, lineáris függőség, lineáris függetlenség

Legyenek $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ azonos típusú vektorok, α , β skalárok, ekkor az

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$$

vektort az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorok α , β együtthatókkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Példák

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad i \begin{bmatrix} 2-i \\ 1+i \end{bmatrix} + (1+i) \begin{bmatrix} 1 \\ 2+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3i \\ -1+5i \end{bmatrix}$$

Általánosan, ha $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ azonos típusú vektorok, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ skalárok, akkor az

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

vektort az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vektorok $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ együtthatókkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük.

Lineáris kombináció, lineáris függőség, lineáris függetlenség

Adott vektorokból egy vektor nem feltétlenül csak egyféleképpen kombinálható ki lineárisan.

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lineáris kombináció, lineáris függőség, lineáris függetlenség

Adott vektorokból egy vektor nem feltétlenül csak egyféleképpen kombinálható ki lineárisan.

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ha ez a helyzet, akkor a nulla vektor is kikombinálható az adott vektorokból többféleképpen, így nem csak csupa nulla együtthatókkal.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a nullvektor **nem triviális lineáris kombinációja** az adott vektoroknak.

Lineáris kombináció, lineáris függőség, lineáris függetlenség

Adott vektorokból egy vektor nem feltétlenül csak egyféleképpen kombinálható ki lineárisan.

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ha ez a helyzet, akkor a nulla vektor is kikombinálható az adott vektorokból többféleképpen, így nem csak csupa nulla együtthatókkal.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a nullvektor **nem triviális lineáris kombinációja** az adott vektoroknak.

Lineáris függőség, lineáris függetlenség

Ha egy vektorrendszerből a nullvektor nem triviális módon is kikombinálható lineárisan, akkor a vektorrendszer **lineárisan függő**. A vektorrendszer **lineárisan független**, ha nem függő.

Generátorrendszer, bázis, dimenzió

Egy vektorrendszer **generátorrendszere** egy vektortérnek, ha a vektortér minden vektora előállítható a vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként. Ekkor azt mondjuk, hogy a vektorrendszer **generálja** az adott vektorteret.

Generátorrendszer, bázis, dimenzió

Egy vektorrendszer **generátorrendszere** egy vektortérnek, ha a vektortér minden vektora előállítható a vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként. Ekkor azt mondjuk, hogy a vektorrendszer **generálja** az adott vektorteret.

Példa

Az $a^T = [2, 0, 0]$, $b^T = [1, 2, 0]$ vektorok nem generálják $\mathbb{R}^3$ -at.

Generátorrendszer, bázis, dimenzió

Egy vektorrendszer **generátorrendszere** egy vektortérnek, ha a vektortér minden vektora előállítható a vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként. Ekkor azt mondjuk, hogy a vektorrendszer **generálja** az adott vektorteret.

Példa

Az $a^T = [2, 0, 0]$, $b^T = [1, 2, 0]$ vektorok nem generálják $\mathbb{R}^3$ -at.

Egy vektortér **végesen generált**, ha van véges sok vektorból álló generátorrendszere.

Generátorrendszer, bázis, dimenzió

Egy vektorrendszer **generátorrendszere** egy vektortérnek, ha a vektortér minden vektora előállítható a vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként. Ekkor azt mondjuk, hogy a vektorrendszer **generálja** az adott vektorteret.

Példa

Az $a^T = [2, 0, 0]$, $b^T = [1, 2, 0]$ vektorok nem generálják $\mathbb{R}^3$ -at.

Egy vektortér **végesen generált**, ha van véges sok vektorból álló generátorrendszere.

Példa

Az $a^T = [2, 0, 0]$, $b^T = [1, 2, 0]$, $c^T = [2, 1, -1]$, $d^T = [1, 1, 1]$ vektorok generálják $\mathbb{R}^3$ -at, de ez a rendszer nem lineárisan független. Ha egy generátorrendszer lineárisan független, akkor **bázisnak** nevezzük.

A végesen generálható vektortereknek minden bázisa ugyanannyi vektort tartalmaz. Ezt a számot a vektortér **dimenziójának** nevezzük.

$\mathbb{R}^n$ -ben és $\mathbb{C}^n$ -ben a vektortér struktúra mellett belső szorzat is definiálható a térben. Az ilyen tereket **Euklideszi terek**nek nevezzük.

A $b_1, \dots, b_n$ bázist az n dimenziós Euklideszi térben **ortogonalis bázis**nak nevezzük, ha b_i merőleges b_j -re minden $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ esetén.

Egy ortogonalis bázist **ortonormált bázis**nak nevezünk, ha $\|b_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Tétel

Minden n dimenziós Euklideszi térnek létezik ortonormált bázisa.

Gramm-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás $\mathbb{R}^3$ -ban

Legyen b_1, b_2, b_3 bázis $\mathbb{R}^3$ -ban, ekkor a

$$q_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}, \quad \bar{q}_2 = b_2 - (b_2^T \cdot q_1)q_1, \quad q_2 = \frac{\bar{q}_2}{\|\bar{q}_2\|},$$

$$\bar{q}_3 = b_3 - (b_3^T \cdot q_1)q_1 - (b_3^T \cdot q_2)q_2, \quad q_3 = \frac{\bar{q}_3}{\|\bar{q}_3\|}.$$

vektorok ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$ -ban.

Feladatok

- Számítsuk ki a következő szorzatokat: $q_1^T \cdot q_2$, $q_1^T \cdot q_3$, $q_2^T \cdot q_3$!
- Alkalmazzuk a Gramm-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást a következő vektorokra! Ellenőrizzük a kapott vektorrendszerek ortonormáltságát!
 - $b_1^T = (1, 1)$, $b_2^T = (1, 2)$.
 - $b_1^T = (-1, 0)$, $b_2^T = (-1, 1)$.
 - $b_1^T = (0, 0, 1)$, $b_2^T = (0, 1, 1)$, $b_3^T = (1, 0, 1)$.
 - $b_1^T = (1, 2, 2)$, $b_2^T = (-1, 0, 2)$, $b_3^T = (0, 0, 1)$.
 - $b_1^T = (0, 1, 2)$, $b_2^T = (1, 1, 2)$, $b_3^T = (1, 0, 1)$.

Mátrixok, mátrixok összeadása

Az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

számtáblázatot, ahol $a_{ij} \in \mathbb{R}$ vagy $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$
 $n \times m$ -es valós vagy komplex **mátrix**nak nevezzük.

Mátrixok, mátrixok összeadása

Az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

számtáblázatot, ahol $a_{ij} \in \mathbb{R}$ vagy $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$
 $n \times m$ -es valós vagy komplex **mátrix**nak nevezzük. Ezek halmazát
 $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ -rel vagy $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ -vel jelöljük.

Mátrixok, mátrixok összeadása

Az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

számtáblázatot, ahol $a_{ij} \in \mathbb{R}$ vagy $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ $n \times m$ -es valós vagy komplex **mátrix**nak nevezzük. Ezek halmazát $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ -rel vagy $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ -vel jelöljük. Ha A és B azonos típusú mátrixok, akkor az összegüket a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1,m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

képlettel definiáljuk.

Mátrixok összeadásának tulajdonságai

- A mátrixok összeadása **művelet** az azonos típusú mátrixok halmazán: két azonos típusú mátrix összege az összeadott mátrixokkal azonos típusú lesz.

Mátrixok összeadásának tulajdonságai

- A mátrixok összeadása **művelet** az azonos típusú mátrixok halmazán: két azonos típusú mátrix összege az összeadott mátrixokkal azonos típusú lesz.
- A mátrixok összeadása **asszociatív**: három azonos típusú mátrix összegét megkaphatom úgy, hogy az első kettő összegéhez hozzáadom a harmadikat és úgy is, hogy az első a másik kettő összegéhez adom hozzá.

Mátrixok összeadásának tulajdonságai

- A mátrixok összeadása **művelet** az azonos típusú mátrixok halmazán: két azonos típusú mátrix összege az összeadott mátrixokkal azonos típusú lesz.
- A mátrixok összeadása **asszociatív**: három azonos típusú mátrix összegét megkaphatom úgy, hogy az első kettő összegéhez hozzáadom a harmadikat és úgy is, hogy az első a másik kettő összegéhez adom hozzá.
- Létezik **additív egység**: tetszőleges mátrixhoz a vele azonos típusú csupa nullákból álló mátrixot hozzáadva (akár balról, akár jobbról) az eredmény az eredeti mátrix lesz.

Mátrixok összeadásának tulajdonságai

- A mátrixok összeadása **művelet** az azonos típusú mátrixok halmazán: két azonos típusú mátrix összege az összeadott mátrixokkal azonos típusú lesz.
- A mátrixok összeadása **asszociatív**: három azonos típusú mátrix összegét megkaphatom úgy, hogy az első kettő összegéhez hozzáadom a harmadikat és úgy is, hogy az első a másik kettő összegéhez adom hozzá.
- Létezik **additív egység**: tetszőleges mátrixhoz a vele azonos típusú csupa nullákból álló mátrixot hozzáadva (akár balról, akár jobbról) az eredmény az eredeti mátrix lesz.
- Létezik **additív inverz**: minden mátrixhoz létezik egy olyan mátrix, amellyel őt tetszőleges sorrendben összeadva a csupa nulla mátrixot kapjuk.

Mátrixok összeadásának tulajdonságai

- A mátrixok összeadása **művelet** az azonos típusú mátrixok halmazán: két azonos típusú mátrix összege az összeadott mátrixokkal azonos típusú lesz.
- A mátrixok összeadása **asszociatív**: három azonos típusú mátrix összegét megkaphatom úgy, hogy az első kettő összegéhez hozzáadom a harmadikat és úgy is, hogy az első a másik kettő összegéhez adom hozzá.
- Létezik **additív egység**: tetszőleges mátrixhoz a vele azonos típusú csupa nullákból álló mátrixot hozzáadva (akár balról, akár jobbról) az eredmény az eredeti mátrix lesz.
- Létezik **additív inverz**: minden mátrixhoz létezik egy olyan mátrix, amellyel őt tetszőleges sorrendben összeadva a csupa nulla mátrixot kapjuk.
- A mátrixok összeadása **kommutatív**: azonos típusú mátrixokat tetszőleges sorrendben adhatok össze.

Mátrixok skalárral való szorzása

Legyen λ skalár és A egy mátrix, ekkor a szorzatukat a következő módon definiáljuk:

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Mátrixok skalárral való szorzása

Legyen λ skalár és A egy mátrix, ekkor a szorzatukat a következő módon definiáljuk:

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Példa

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -6 & 12 & 12 \end{bmatrix}.$$

Mátrixok skalárral való szorzásának tulajdonságai

- Tetszőleges mátrixot a nulla számmal megszorozva a csupa nulla mátrixot kapom.

Mátrixok skalárral való szorzásának tulajdonságai

- Tetszőleges mátrixot a nulla számmal megszorozva a csupa nulla mátrixot kapom.
- Ha tetszőleges mátrixot megszorozok eggyel, akkor magát a mátrixot kapom eredményül.

Mátrixok skalárral való szorzásának tulajdonságai

- Tetszőleges mátrixot a nulla számmal megszorozva a csupa nulla mátrixot kapom.
- Ha tetszőleges mátrixot megszorozok eggyel, akkor magát a mátrixot kapom eredményül.
- Ha egy mátrixot megszorozok egy skalárral, majd a kapott mátrixot újra megszorozom egy másik skalárral, akkor az eredmény ugyanaz lesz, ha a mátrixot a skalárok szorzatával szorzom meg.

Mátrixok skalárral való szorzásának tulajdonságai

- Tetszőleges mátrixot a nulla számmal megszorozva a csupa nulla mátrixot kapom.
- Ha tetszőleges mátrixot megszorozok eggyel, akkor magát a mátrixot kapom eredményül.
- Ha egy mátrixot megszorozok egy skalárral, majd a kapott mátrixot újra megszorozom egy másik skalárral, akkor az eredmény ugyanaz lesz, ha a mátrixot a skalárok szorzatával szorzom meg.
- **Disztributivitás:** Mátrixok összegét egy skalárral megszorozva úgy is megkaphatom, ha a mátrixokat külön-külön megszorozom a szóban forgó skalárral, majd az így kapott mátrixokat adom össze.
Hasonlóan, egy mátrixot úgy is megszorozhatok skalárok összegével, hogy külön-külön megszorozom a mátrixot a szóban forgó skalárokkal, majd a kapott mátrixokat összeadom.

Mátrixok szorzása

Tekintsünk két mátrixot úgy, hogy az elsőnek ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a másodiknak, azaz, $A \in \mathcal{M}n \times m$ és $B \in \mathcal{M}m \times k$. Ekkor definiálható az $C = AB$ szorzat, ahol $C \in \mathcal{M}n \times k$ és a C mátrix i . sorának j . eleme az A mátrix i . sorának és a B mátrix j . oszlopának belső szorzata, azaz

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^m a_{it} b_{tj}.$$

Mátrixok szorzása

Tekintsünk két mátrixot úgy, hogy az elsőnek ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a másodiknak, azaz, $A \in \mathcal{M}n \times m$ és $B \in \mathcal{M}m \times k$. Ekkor definiálható az $C = AB$ szorzat, ahol $C \in \mathcal{M}n \times k$ és a C mátrix i . sorának j . eleme az A mátrix i . sorának és a B mátrix j . oszlopának belső szorzata, azaz

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^m a_{it}b_{tj}.$$

Feladat

Számítsuk ki az $A^T B$, AB^T , CD , CB , $A^T D$ szorzatokat, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 - 2i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & i & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -i \\ 3 & 2 \\ i & i + 2 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

- A mátrixok szorzása még a négyzetes mátrixok körében sem kommutatív!

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

- A mátrixok szorzása még a négyzetes mátrixok körében sem kommutatív!
- A mátrixok szorzása **asszociatív (csoportosítható)**.

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

- A mátrixok szorzása még a négyzetes mátrixok körében sem kommutatív!
- A mátrixok szorzása **asszociatív (csoportosítható)**.
- Szorzat transzponáltja megegyezik a transzponáltak fordított sorrendű szorzatával, azaz $(AB)^T = B^T A^T$.

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

- A mátrixok szorzása még a négyzetes mátrixok körében sem kommutatív!
- A mátrixok szorzása **asszociatív (csoportosítható)**.
- Szorzat transzponáltja megegyezik a transzponáltak fordított sorrendű szorzatával, azaz $(AB)^T = B^T A^T$.
- **Disztributivitás:** $(A + B)C = AC + BC$ és $A(B + C) = AB + AC$.

Feladat

Végezzük el a következő számításokat

AB , BA , $(AB)^T$, $A^T B^T$, $(A + B)C$, $AC + BC$, ahol

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1+i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Az

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot $n \times n$ -es **egységmátrix**nak nevezzük. Ha nem okoz félreértést, akkor I -t írunk I_n helyett.

Az

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot $n \times n$ -es **egységmátrix**nak nevezzük. Ha nem okoz félreértést, akkor I -t írunk I_n helyett. Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Azt mondjuk, hogy A **invertálható**, ha létezik olyan $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix, hogy $AB = BA = I$.

Az

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot $n \times n$ -es **egységmátrix**nak nevezzük. Ha nem okoz félreértést, akkor I -t írunk I_n helyett. Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Azt mondjuk, hogy A **invertálható**, ha létezik olyan $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix, hogy $AB = BA = I$.

Feladat

Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2 × 2-es mátrixok determinánsa

Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ mátrixot. Ekkor ehhez a hozzárendelünk egy számot a következő módon:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ezt a számot az A mátrix **determinánsának** nevezzük.

2 × 2-es mátrixok determinánsa

Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ mátrixot. Ekkor ehhez a hozzárendelünk egy számot a következő módon:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ezt a számot az A mátrix **determinán**sának nevezzük.

Feladat

Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2+i & 3i \\ -i & 2i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+i & 2+2i \\ -i & -2i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

A determináns geometriai jelentése.

3 × 3-as mátrixok determinánsa

Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mátrixot. Ekkor ehhez a hozzárendelünk egy számot a következő módon:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ezt a számot az A mátrix **determinánsának** nevezzük.

3 × 3-as mátrixok determinánsa

Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mátrixot. Ekkor ehhez a hozzárendelünk egy számot a következő módon:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ezt a számot az A mátrix **determinánsának** nevezzük.

Feladat

Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1 & -i \\ 2 & 4 & 1 \\ 3i & -2i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 2 \\ 0 & -1-i & 3 \\ \pi & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kifejtési tétel

Az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó **aldetermináns** az A_{ij} mátrix determinánása, ahol A_{ij} jelöli az A i . sorának és j . oszlopának elhagyásával kapott mátrixot.

Tétel

Ha A egy $n \times n$ -es mátrix, akkor a determinánása kiszámítható a következő módon:

$$\det A = \sum_{t=1}^n (-1)^{i+t} a_{it} \det A_{it}, \quad (\text{kifejtés az } i. \text{ sor szerint})$$

vagy

$$\det A = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+j} a_{tj} \det A_{tj}, \quad (\text{kifejtés a } j. \text{ oszlop szerint}).$$

Feladat

Számítsuk ki egy tetszőleges 4×4 -es mátrix determinánását!

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss elimináció

Tekintsük a következő három egyenletből álló rendszert:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned} \quad \text{vagy} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_b$$

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss elimináció

Tekintsük a következő három egyenletből álló rendszert:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned} \quad \text{vagy} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_b$$

Az a célunk, hogy a fenti rendszert az alábbi alakra hozzuk:

$$\begin{aligned}a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 &= b'_1 \\a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\a'_{33}x_3 &= b'_3\end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss elimináció

Tekintsük a következő három egyenletből álló rendszert:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \quad \text{vagy} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_b$$

Az a célunk, hogy a fenti rendszert az alábbi alakra hozzuk:

$$\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 & = & b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 & = & b'_2 \\ a'_{33}x_3 & = & b'_3 \end{array}$$

Ezek után az utolsó egyenletből kapjuk x_3 -at, ezt behelyettesítjük a második egyenletbe, kapjuk x_2 -t és így tovább.

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss elimináció

Tekintsük a következő három egyenletből álló rendszert:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \quad \text{vagy} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_b$$

Az a célunk, hogy a fenti rendszert az alábbi alakra hozzuk:

$$\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 & = & b'_1 \\ & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 & = b'_2 \\ & a'_{33}x_3 & = b'_3 \end{array}$$

Ezek után az utolsó egyenletből kapjuk x_3 -at, ezt behelyettesítjük a második egyenletbe, kapjuk x_2 -t és így tovább. A kívánt alak eléréséhez először eliminálnunk kell x_1 -et a második és harmadik egyenletből. Ha az első sor $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ -szeresét levonjuk a második sorból, és az első sor $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ -szeresét a harmadikból, akkor a kívánt eredményt kapjuk. Az eljárást folytatva x_2 -vel a kívánt alakot kapjuk. Az eljárás kiterjeszthető tetszőleges lineáris egyenletrendszerre.

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss elimináció

Tekintsük a következő három egyenletből álló rendszert:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \quad \text{vagy} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_b$$

Az a célunk, hogy a fenti rendszert az alábbi alakra hozzuk:

$$\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 & = & b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 & = & b'_2 \\ a'_{33}x_3 & = & b'_3 \end{array}$$

Ezek után az utolsó egyenletből kapjuk x_3 -at, ezt behelyettesítjük a második egyenletbe, kapjuk x_2 -t és így tovább. A kívánt alak eléréséhez először eliminálnunk kell x_1 -et a második és harmadik egyenletből. Ha az első sor $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ -szeresét levonjuk a második sorból, és az első sor $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ -szeresét a harmadikból, akkor a kívánt eredményt kapjuk. Az eljárást folytatva x_2 -vel a kívánt alakot kapjuk. Az eljárás kiterjeszthető tetszőleges lineáris egyenletrendszerre. Az imént vázolt algoritmust **Gauss eliminációnak** hívjuk.

Példa

Végezzük el az eliminációt az alábbi rendszeren, majd a mátrixos alakon is!

$$\begin{array}{rrcr} 6x_1 & -12x_2 & +6x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = & -10 \end{array}$$

Példa

Végezzük el az eliminációt az alábbi rendszeren, majd a mátrixos alakon is!

$$\begin{array}{rrcr} 6x_1 & -12x_2 & +6x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = & -10 \end{array}$$

Ha $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ és $b \in \mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n$, akkor az

$$(LE) \quad Ax = b, \quad \text{mátrixos alakban} \quad (A|b)$$

rendszert **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük, ahol x m dimenziós ismeretlen vektor.

Példa

Végezzük el az eliminációt az alábbi rendszeren, majd a mátrixos alakon is!

$$\begin{array}{rrcr} 6x_1 & -12x_2 & +6x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = & -10 \end{array}$$

Ha $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ és $b \in \mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n$, akkor az

$$(LE) \quad Ax = b, \quad \text{mátrixos alakban} \quad (A|b)$$

rendszert **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük, ahol x m dimenziós ismeretlen vektor. Ha $b = 0$, akkor (LE)-t **homogén lineáris egyenletrendszernek**, ellenkező esetben **inhomogén lineáris egyenletrendszernek** nevezzük

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-Jordan elimináció

Tegyük fel, hogy n darab n ismeretlent tartalmazó egyenletünk van. Ezt szeretnénk az alábbi alakúra hozni:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +0 & +\cdots & +0 & = & c_1 \\ 0 & +x_2 & +\cdots & +0 & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & +0 & +\cdots & +x_n & = & c_n \end{array}$$

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-Jordan elimináció

Tegyük fel, hogy n darab n ismeretlent tartalmazó egyenletünk van. Ezt szeretnénk az alábbi alakúra hozni:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +0 & +\cdots & +0 & = & c_1 \\ 0 & +x_2 & +\cdots & +0 & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & +0 & +\cdots & +x_n & = & c_n \end{array}$$

Ezt a Gauss elimináció egy módosításával tehetjük meg. Az x_j változót a j . lépésben nem csak a diagonális alatt, hanem fölötte is elimináljuk, és az együtthatójával leosztjuk a j . sort, így a kívánt (fenti) formát érjük el, ha az alaplátrix determinánsa nem nulla. Ezt az eljárást **Gauss-Jordan elimináció**nak nevezzük.

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-Jordan elimináció

Tegyük fel, hogy n darab n ismeretlent tartalmazó egyenletünk van. Ezt szeretnénk az alábbi alakúra hozni:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +0 & +\cdots & +0 & = & c_1 \\ 0 & +x_2 & +\cdots & +0 & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & +0 & +\cdots & +x_n & = & c_n \end{array}$$

Ezt a Gauss elimináció egy módosításával tehetjük meg. Az x_j változót a j . lépésben nem csak a diagonális alatt, hanem fölötte is elimináljuk, és az együtthatójával leosztjuk a j . sort, így a kívánt (fenti) formát érjük el, ha az alaplátrix determinánsa nem nulla. Ezt az eljárást **Gauss-Jordan elimináció**nak nevezzük.

Példa

Végezzük el a Gauss-Jordan eliminációt az alábbi rendszer mátrixos alakján!

$$\begin{array}{rrcr} 6x_1 & -12x_2 & +6x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = & -10 \end{array}$$

Lineáris egyenletrendszerek, megoldás létezése

Tegyük fel, hogy adott n darab lineáris egyenlet n változóval. Ezeket **lineárisan függő**nek nevezzük, ha valamelyik a többi lineáris kombinációjaként kifejezhető. Ellenkező esetben az egyenletrendszer **lineárisan független**.

Lineáris egyenletrendszerek, megoldás létezése

Tegyük fel, hogy adott n darab lineáris egyenlet n változóval. Ezeket **lineárisan függő**nek nevezzük, ha valamelyik a többi lineáris kombinációjaként kifejezhető. Ellenkező esetben az egyenletrendszer **lineárisan független**. Ha egyértelműen meg szeretnénk határozni n változót, akkor ahhoz n darab lineárisan független egyenletre van szükségünk, ha az n egyenletünk közül m darab lineárisan független és tetszőleges $m + 1$ darab már lineárisan függő, akkor $n - m$ darab változót tetszőlegesen választhatunk.

Lineáris egyenletrendszerek, megoldás létezése

Tegyük fel, hogy adott n darab lineáris egyenlet n változóval. Ezeket **lineárisan függő**nek nevezzük, ha valamelyik a többi lineáris kombinációjaként kifejezhető. Ellenkező esetben az egyenletrendszer **lineárisan független**. Ha egyértelműen meg szeretnénk határozni n változót, akkor ahhoz n darab lineárisan független egyenletre van szükségünk, ha az n egyenletünkben m darab lineárisan független és tetszőleges $m + 1$ darab már lineárisan függő, akkor $n - m$ darab változót tetszőlegesen választhatunk. Ha $m > n$, azaz több egyenletünk van, mint változónk, akkor a rendszer **túlhatározott**.

Lineáris egyenletrendszerek, megoldás létezése

Tegyük fel, hogy adott n darab lineáris egyenlet n változóval. Ezeket **lineárisan függő**nek nevezzük, ha valamelyik a többi lineáris kombinációjaként kifejezhető. Ellenkező esetben az egyenletrendszer **lineárisan független**. Ha egyértelműen meg szeretnénk határozni n változót, akkor ahhoz n darab lineárisan független egyenletre van szükségünk, ha az n egyenletünk közül m darab lineárisan független és tetszőleges $m + 1$ darab már lineárisan függő, akkor $n - m$ darab változót tetszőlegesen választhatunk. Ha $m > n$, azaz több egyenletünk van, mint változónk, akkor a rendszer **túlhatározott**. A homogén egyenletnek a nulla vektor mindig megoldása, ezt **triviális megoldás**nak nevezzük. Ha van nullától különböző megoldása, akkor annak minden skalárszorosa is megoldás lesz, és tetszőleges megoldások tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás lesz.

Lineáris egyenletrendszerek, megoldás létezése

Tegyük fel, hogy adott n darab lineáris egyenlet n változóval. Ezeket **lineárisan függő**nek nevezzük, ha valamelyik a többi lineáris kombinációjaként kifejezhető. Ellenkező esetben az egyenletrendszer **lineárisan független**. Ha egyértelműen meg szeretnénk határozni n változót, akkor ahhoz n darab lineárisan független egyenletre van szükségünk, ha az n egyenletünk közül m darab lineárisan független és tetszőleges $m + 1$ darab már lineárisan függő, akkor $n - m$ darab változót tetszőlegesen választhatunk. Ha $m > n$, azaz több egyenletünk van, mint változónk, akkor a rendszer **túlhatározott**. A homogén egyenletnek a nulla vektor mindig megoldása, ezt **triviális megoldás**nak nevezzük. Ha van nullától különböző megoldása, akkor annak minden skalárszorosa is megoldás lesz, és tetszőleges megoldások tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás lesz.

Tétel

A homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

Inhomogén lineáris egyenletrendszer

Legyen v egy vektora S pedig egy altere a V vektortérnek. Ekkor a

$$v + S = \{ x \in V \mid x = v + s, \text{ valamely } s \in S\text{-re} \}$$

halmazt **lineáris sokaság**nak nevezzük.

Inhomogén lineáris egyenletrendszerek

Legyen v egy vektora S pedig egy altere a V vektortérnek. Ekkor a

$$v + S = \{ x \in V \mid x = v + s, \text{ valamely } s \in S\text{-re} \}$$

halmazt **lineáris sokaság**nak nevezzük.

Tétel

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai lineáris sokaságot alkotnak azaz, a megoldáshalmaz $v + S$ alakú, ahol S a homogén rész megoldásterét, v pedig egy megoldása az inhomogén egyenletrendszernek.

Inhomogén lineáris egyenletrendszerek

Legyen v egy vektora S pedig egy altere a V vektortérnek. Ekkor a

$$v + S = \{ x \in V \mid x = v + s, \text{ valamely } s \in S\text{-re} \}$$

halmazt **lineáris sokaság**nak nevezzük.

Tétel

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai lineáris sokaságot alkotnak azaz, a megoldáshalmaz $v + S$ alakú, ahol S a homogén rész megoldásterét, v pedig egy megoldása az inhomogén egyenletrendszernek.

Tétel

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer $Ax = b$ pontosan akkor megoldható, ha a b vektor lineárisan kikombinálható az A oszlopvektoraiból.

Mátrix inverzének kiszámítása Gauss-Jordan eliminációval

Az A mátrixhoz olyan X mátrixot keresünk, amelyre $AX = I$. Ha A $n \times n$ -es, akkor ez n darab lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti. Nevezetesen, A oszlopaiból lineárisan ki kell kombinálnunk az e_i , $i = 1, \dots, n$ természetes bázisvektorit $\mathbb{R}^n$ -nek, ahol $e_i^T = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$. Ezt megtehetjük egyszerre, tehát az n darab lineáris egyenletrendszert szimultán Gauss-Jordan eliminációval oldjuk meg.

$$(A|I) \longrightarrow (I|A^{-1})$$

Mátrix inverzének kiszámítása Gauss-Jordan eliminációval

Az A mátrixhoz olyan X mátrixot keresünk, amelyre $AX = I$. Ha A $n \times n$ -es, akkor ez n darab lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti. Nevezetesen, A oszlopaiból lineárisan ki kell kombinálnunk az e_i , $i = 1, \dots, n$ természetes bázisvektorit $\mathbb{R}^n$ -nek, ahol $e_i^T = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$. Ezt megtehetjük egyszerre, tehát az n darab lineáris egyenletrendszert szimultán Gauss-Jordan eliminációval oldjuk meg.

$$(A|I) \longrightarrow (I|A^{-1})$$

Feladat

Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit!

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mátrixok rangja

Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített tér dimenzióját a mátrix **oszloprangjának** nevezzük. Hasonlóan, a mátrix sorai által kifeszített tér dimenzióját a mátrix **sorrangjának** nevezzük.

Mátrixok rangja

Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített tér dimenzióját a mátrix **oszloprangjának** nevezzük. Hasonlóan, a mátrix sorai által kifeszített tér dimenzióját a mátrix **sorrangjának** nevezzük.

Tétel

Tetszőleges mátrix sor- és oszloprangja egyenlő.

Mátrixok rangja

Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített tér dimenzióját a mátrix **oszloprangjának** nevezzük. Hasonlóan, a mátrix sorai által kifeszített tér dimenzióját a mátrix **sorrangjának** nevezzük.

Tétel

Tetszőleges mátrix sor- és oszloprangja egyenlő.

A fenti tétel által definiált számot a mátrix **rangjának** nevezzük.

Mátrixok rangja

Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített tér dimenzióját a mátrix **oszloprangjának** nevezzük. Hasonlóan, a mátrix sorai által kifeszített tér dimenzióját a mátrix **sorrangjának** nevezzük.

Tétel

Tetszőleges mátrix sor- és oszloprangja egyenlő.

A fenti tétel által definiált számot a mátrix **rangjának** nevezzük.

Feladat

Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját Gauss eliminációval!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sajátérték, sajátvektor

Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix és x egy n dimenziós, nullától különböző vektor. Ha létezik olyan λ szám, hogy

$$Ax = \lambda x,$$

akkor λ -t A **sajátérték**ének, x -et pedig a λ -hoz tartozó **sajátvektornak** nevezzük.

Sajátérték, sajátvektor

Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix és x egy n dimenziós, nullától különböző vektor. Ha létezik olyan λ szám, hogy

$$Ax = \lambda x,$$

akkor λ -t A **sajátérték**ének, x -et pedig a λ -hoz tartozó **sajátvektor**nak nevezzük.

Példa

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Sajátérték, sajátvektor

Legyen $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrix és x egy n dimenziós, nullától különböző vektor. Ha létezik olyan λ szám, hogy

$$Ax = \lambda x,$$

akkor λ -t A **sajátérték**ének, x -et pedig a λ -hoz tartozó **sajátvektor**nak nevezzük.

Példa

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Tétel

Ugyanazon sajátértékhez tartozó vektorok alteret alkotnak.

Sajátértékek kiszámítása

A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

Tétel

Az A mátrixnak λ pontosan akkor sajátértéke, ha gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Sajátértékek kiszámítása

A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

Tétel

Az A mátrixnak λ pontosan akkor sajátértéke, ha gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Feladat

Számítsuk ki a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$